

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Абдрахманов Данияр Мавлизович
Должность: ректор ГБОУ ВО "БАГСУ"
Дата подписания: 09.06.2025 10:51:38
Уникальный программный ключ:
6caf317d71a2c7d2f749ed2578795b66901352dd

ГБОУ ВО «Башкирская академия государственной службы
и управления при Главе Республики Башкортостан»

Кафедра менеджмента и социальной психологии

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.16 Основы теории вероятности и математической статистики

Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ

Направление подготовки

37.03.01 Психология

Направленность (профиль) **Организационная психология**

Форма обучения
очно-заочная

Уфа 2021

Рабочая программа дисциплины Б1.О.16 «Основы теории вероятности и математической статистики» /сост. Д.В. Кондратьев - Уфа: ГБОУ ВО «БАГСУ», 2021.

Рабочая программа предназначена для обучающихся очно-заочной формы обучения направления подготовки 37.03.01 Психология

РЕКОМЕНДОВАНА заседанием кафедры менеджмента и социальной психологии протокол №3 от "29" января 2021 г.

© Кондратьев Д.В., 2021
© ГБОУ ВО «БАГСУ», 2021

Содержание

1 Цели и задачи освоения дисциплины.....	4
2 Требования к результатам обучения по дисциплине.....	5
3 Структура и содержание дисциплины.....	7
3.1 Структура дисциплины.....	7
3.2 Содержание разделов дисциплины.....	8
3.3 Практические занятия (семинары).....	9
3.4 Курсовой проект (курсовая работа).....	9
4 Учебно-методическое обеспечение дисциплины.....	9
4.1 Основная литература.....	9
4.2 Дополнительная литература.....	10
4.3 Периодические издания.....	10
4.4 Интернет-ресурсы.....	10
4.5 Методические указания к практическим занятиям (семинарам) ⁷	10
4.6 Методические указания к курсовому проектированию и другим видам самостоятельной работы.....	11
4.7 Программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы современных информационных технологий.....	11
5 Материально-техническое обеспечение дисциплины.....	11

1 Цели и задачи освоения дисциплины

Цель (цели) освоения дисциплины:

Освоение компетенции в осуществлении научных исследований в сфере профессиональной деятельности на основе современной методологии

Задачи:

- ознакомить студента с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач в психологии;
- развить логическое мышление, повысить общий уровень математической культуры;
- выработать навыки вероятностно-статистического исследования, необходимого для решения теоретических и практических задач в психологии;
- сформировать компетенции обучающегося в области применения математических методов и средств при решении прикладных задач.

2 Требования к результатам обучения по дисциплине

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих результатов обучения

Код компетенции	Содержание компетенции (или её части)	Индикаторы компетенций ¹	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций
ОПК – 1	Способен осуществлять научное исследование в сфере профессиональной деятельности на основе современной методологии	ОПК – 1.1 Умеет использовать знания и теории современной методологии для организации научного исследования в сфере профессиональной деятельности	<u>Знать:</u> Низкий уровень освоения: основные понятия теории вероятностей, используемые при решении профессиональных задач Средний уровень освоения: основные понятия теории вероятностей и математической статистики, используемые при решении профессиональных задач Высокий уровень освоения: основные понятия и закономерности теории вероятностей и методы статистической обработки данных, необходимые для решения прикладных задач <u>Уметь:</u> Низкий уровень освоения: применять методы теоретического и экспериментального исследования для постановки прикладных вероятностных и статистических задач Средний уровень освоения: применять методы теоретического и экспериментального исследования для постановки и выбора подходов к решению прикладных вероятностных и статистических задач Высокий уровень освоения:

¹ Индикаторы компетенций указываются из ОПОП ВО соответствующего направлению подготовки бакалавра /магистра». Каждый индикатор раскрывается через «знать», «уметь», «владеть».

			применять методы теоретического и экспериментального исследования для решения прикладных вероятностных и статистических задач
ОПК – 1	Способен осуществлять научное исследование в сфере профессиональной деятельности на основе современной методологии	ОПК – 1.2 Владеет современной методологией для постановки проблемы, планирования и организации исследования, формулирования выводов по его результатам в сфере профессиональной деятельности	<u>Владеть:</u> Низкий уровень освоения: навыками применения современного математического инструментария для решения прикладных задач Средний уровень освоения: методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития социальных явлений и процессов Высокий уровень освоения: навыками применения современного математического инструментария для решения прикладных задач; методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития социальных явлений и процессов

3 Структура и содержание дисциплины

3.1 Структура дисциплины

Очно-заочная форма обучения

Общая трудоемкость дисциплины составляет 8 зачетных единиц (288 академических часов).

Вид работы	Трудоемкость, академических часов		
	Семестр 1	Семестр 2	всего
Общая трудоёмкость	72	216	288
Контактная работа:	30	62	92
Лекции (Л)	14	30	44
Практические занятия (ПЗ)	16	32	48
Самостоятельная работа:	42	118	160
- самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий);	10	29	39
	10	29	39
- темы для самостоятельного изучения;	10	30	40
- подготовка к практическим занятиям;	12	30	40
- подготовка к рубежному контролю.			
Вид итогового контроля (зачет, экзамен)	зачет	экзамен	экзамен

Примечание: В таблице (раздел «Контактная работа») перечисляются только реализуемые виды контактной работы.

Разделы дисциплины, изучаемые в 1-2 семестре

№ раздела	Наименование разделов	Количество часов			
		всего	аудиторная работа		внеауд. работа
			Л	ПЗ	
1.	Случайные события	72	14	16	42
	Итого:	72	14	16	42
2.	Случайные величины	89	14	16	59
3.	Математическая статистика	91	16	16	59
	Итого:	180	30	32	118
	Всего:	252	44	48	160

3.2 Содержание разделов дисциплины

1. Случайные события

События и их классификация. Алгебра событий. Классическое и статистическое определение вероятности случайного события. Геометрические вероятности.

Элементы комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания. Основные формулы. Решение задач на классическое определение вероятности с использованием формул комбинаторики.

Теоремы сложения вероятностей для несовместных и совместных событий. Условная вероятность. Независимость событий. Теорема умножения вероятностей для зависимых и независимых событий.

Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Схема повторных испытаний. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.

2. Случайные величины

Случайная величина. Виды случайных величин (дискретные и непрерывные случайные величины). Дискретные случайные величины и их числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение).

Основные законы распределения дискретных случайных величин (биномиальное распределение, распределение Пуассона, геометрическое распределение, гипергеометрическое распределение).

Функция распределения вероятностей случайной величины (дискретной и непрерывной). Свойства, график функции распределения.

Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины. Свойства, график плотности распределения.

Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Основные законы распределения непрерывных случайных величин (равномерное распределение, показательное распределение, нормальное распределение)

Начальные и центральные теоретические моменты. Асимметрия и эксцесс случайной величины

Функция распределения и плотность вероятностей двумерной случайной величины. Условные законы распределения дискретной случайной величины. Функции случайных аргументов. Системы случайных величин. Числовые характеристики системы двух случайных величин. Ковариация и коэффициент корреляции

Закон больших чисел. Предельные теоремы теории вероятностей.

Первоначальные сведения о цепях Маркова. Однородная цепь Маркова. Матрица переходных вероятностей. Равенство Маркова.

3. Математическая статистика

Понятия генеральной совокупности и выборки. Объём выборки.

Статистическое распределение выборки (вариационный ряд, его характеристики; полигон и гистограмма частот; эмпирическая функция распределения). Статистические оценки параметров распределения (точечные и интервальные оценки параметров распределения. Точность интервальной оценки, доверительная вероятность. Доверительный интервал).

Корреляционный анализ и статистические гипотезы (выборочные коэффициенты корреляции и регрессии; линейная регрессия; статистические гипотезы; проверка гипотез о дисперсиях и математических ожиданиях; критерий согласия χ^2 Пирсона)

3.3 Практические занятия (семинары)

Очно-заочная форма обучения

№ занятия	№ раздела	Тема	Кол-во часов
1-8	1	Случайные события	16
9-16	2	Случайные величины	16
17-24	3	Математическая статистика	16
		Итого:	48

3.4 Курсовой проект (курсовая работа)

Курсовой проект (курсовая работа) учебным планом не предусмотрен.

4 Учебно-методическое обеспечение дисциплины

4.1 Основная литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для бакалавров. - 12-е изд. - М.: Юрайт, 2013. - 479 с.

4.2 Дополнительная литература

1. Ниворожкина, Л. И. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов / Л. И. Ниворожкина, З. А. Морозова. - М.: Эксмо, 2008. - 432 с.

2. Балдин, К. В. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. - 2-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 473 с.- режим доступа - ZNANIUM.COM

4.3 Периодические издания

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» - <http://www.mathnet.ru/tvp>

4.4 Интернет-ресурсы

1. Репозиторий Самарского университета - <http://repo.ssau.ru/handle/Uchebnye-izdaniya/Teoriya-veroyatnostei-Matematicheskaya-statistika-Elektronnyi-resurs-praktikum-po-matematike-80422>
2. Википедия – Свободная энциклопедия - https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D1%80%D0%BE%D1%8F%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9

4.5 Методические указания к практическим занятиям (семинарам)

Для подготовки к зачёту студентам следует самостоятельно изучить некоторые разделы дисциплины и выполнить соответствующие задания в соответствии с методическими указаниями для самостоятельной работы. Результаты самостоятельной работы должны быть предъявлены преподавателю в течение семестра, до начала сессии.

Содержание учебного материала сгруппировано по темам, в которые включены основные понятия, а также виды деятельности, обязательные для освоения студентами с целью применения в последующей деятельности специалиста.

Для выполнения итоговой зачётной работы студенты должны получить допуск по результатам проверки их теоретических знаний по изучаемой тематике дисциплины. Обязательным также является отработка всех практических занятий и выполнение индивидуального семестрового задания.

Результаты индивидуальной зачётной работы оцениваются с учетом теоретических знаний по соответствующим разделам дисциплины, техники выполнения работы, объективности и обоснованности принимаемых решений в процессе работы с данными, качества оформления.

4.6 Методические указания к курсовому проектированию и другим видам самостоятельной работы

Курсовой проект (курсовая работа) учебным планом не предусмотрен.

4.7 Программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы современных информационных технологий

Аудитория 304.

Приложение: MicrosoftOffice 2010 Standart(договор поставки программного обеспечения № 178-ПО/2010 от 30.11.2010 г. (ООО "Абсолют-Информ"). Кол-во лицензий: 55 шт.)

Учебные программы:

- MicrosoftProjectStandart 2007 (договор поставки программного обеспечения № 028 – ПО/2009 от 10.12.2009 г (ООО "Аир-Информ"). Кол-во лицензий: 12 шт.)

- СПС "Консультант Плюс" (соглашение об информационной поддержке от 09.06.2016 г. (ООО Компания права "Респект", РИЦ 33). Кол-во лицензий: сетевая версия (неограниченно))

- СДО "Прометей" (лицензия на право использования ПО по договору поставки программного обеспечения № 1/БАГСУ/02/07 от 14.03.2007 г. (ООО "Виртуальные технологии в образовании"). Кол-во лицензий: сетевая версия (неограниченно)).

5 Материально-техническое обеспечение дисциплины

В образовательном процессе применяются аудитории 209, 304.

Аудитория 209.

Настенный экран MW – 1 шт.

Доска маркерно-магнитная – 1шт.

Доска классная -1 шт.

Флипчарт (лекционный блок) – 1 шт.

Наглядные материалы по дисциплине Теория государства и права – 10 шт.

Аудитория 304.

Персональный компьютер – 13 шт. свыходом в Интернет

Принтер HP Color LJ Pro 200 M25 frw (CF147A) A4 цветной лазерный - 1 шт.

Проектор Beng MW526 DLP 3200Lm WXGA – шт.1

Экран на штативе 180x180см DinonTripod - 1 шт.

29 посадочных мест.

Доска маркерно - магнитная -1 шт.

Доска классная -1 шт.

Аудитория 204.

Персональный компьютер – 8 шт. с выходом в Интернет.
Доска маркерно- магнитная – 1 шт.

К рабочей программе прилагаются:

Фонд оценочных средств для проведения аттестации уровня сформированности компетенций обучающихся по дисциплине (модулю), который разрабатывается в виде отдельного документа.

**ГБОУ ВО «Башкирская академия государственной службы
и управления при Главе Республики Башкортостан»**

Кафедра менеджмента и социальной психологии

Фонд оценочных средств
по дисциплине
«Основы теории вероятности и математической статистики»

Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ

Направление подготовки

37.03.01 Психология

Направленность (профиль) Организационная психология

Форма обучения
очно-заочная

Уфа 2021

Фонд оценочных средств предназначен для контроля знаний обучающихся по направлению подготовки 37.03.01 Психология по дисциплине «Основы теории вероятности и математической статистики».

Фонд оценочных средств является приложением к рабочей программе по дисциплине «Основы теории вероятности и математической статистики».

Составитель: Д.В. Кондратьев

Фонд оценочных средств обсужден на заседании кафедры менеджмента и социальной психологии

**Паспорт фонда оценочных средств
по дисциплине «Основы теории вероятности и математической
статистики»**

1. Основные сведения о дисциплине

Общая трудоемкость дисциплины составляет 8 зачетных единиц (288 академических часа).

Очно-заочная форма обучения

Вид работы	Трудоемкость, академических часов		
	Семестр 1	Семестр 2	всего
Общая трудоёмкость	72	216	288
Контактная работа:	30	62	92
Лекции (Л)	14	30	44
Практические занятия (ПЗ)	16	32	48
Самостоятельная работа:	42	118	160
- самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий);	10	29	39
	10	29	39
- темы для самостоятельного изучения;	10	30	40
- подготовка к практическим занятиям;	12	30	40
- подготовка к рубежному контролю.			
Вид итогового контроля (зачет, экзамен)	зачет	экзамен	экзамен

Разделы дисциплины, изучаемые в 1-2 семестре

№ раздела	Наименование разделов	Количество часов			
		всего	аудиторная работа		внеауд. работа
			Л	ПЗ	
1.	Случайные события	72	14	16	42
	Итого:	72	14	16	42
2.	Случайные величины	89	14	16	59
3.	Математическая статистика	91	16	16	59
	Итого:	180	30	32	118
	Всего:	252	44	48	160

2. Требования к результатам обучения по дисциплине, формы их контроля и виды оценочных средств

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих результатов обучения

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций	Типы контроля
ОПК-1 Способен осуществлять научное исследование в сфере	Знать: Низкий уровень освоения: основные понятия теории вероятностей, используемые при решении профессиональных задач	- Тестирование по лекционному материалу

профессионально й деятельности на основе современной методологии	Средний уровень освоения: основные понятия теории вероятностей и математической статистики, используемые при решении профессиональных задач Высокий уровень освоения: основные понятия и закономерности теории вероятностей и методы статистической обработки данных, необходимые для решения прикладных задач	
	<u>Уметь:</u> Низкий уровень освоения: применять методы теоретического и экспериментального исследования для постановки прикладных вероятностных и статистических задач Средний уровень освоения: применять методы теоретического и экспериментального исследования для постановки и выбора подходов к решению прикладных вероятностных и статистических задач Высокий уровень освоения: применять методы теоретического и экспериментального исследования для решения прикладных вероятностных и статистических задач	- Письменные проверочные работы
	<u>Владеть:</u> Низкий уровень освоения: навыками применения современного математического инструментария для решения прикладных задач Средний уровень освоения: методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития социальных явлений и процессов Высокий уровень освоения: навыками применения современного математического инструментария для решения прикладных задач; методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития социальных явлений и процессов	- Письменные проверочные работы

3 Организация и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся (СРО) направлена на закрепление и углубление освоенного учебного материала, развитие практических умений и навыков.

Виды СРО:

- самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий);
- темы для самостоятельного изучения;
- подготовка к практическим занятиям;
- подготовка к рубежному контролю.

4 Вопросы для экзамена

1. Определение вероятности по Лапласу (комбинаторное определение).
2. Геометрическое определение вероятности. Взаимосвязь между геометрическим определением вероятности и определением вероятности по Лапласу.
3. Аксиоматическое (по Колмогорову) определение вероятности.
4. Определение: (а) независимых случайных событий; (б) полной группы случайных событий.
5. Вывод формулы полной вероятности.
6. Формула Байеса.
7. Определение независимых испытаний. Схема Бернулли.
8. Определение скалярной случайной величины, основные свойства ее функции распределения.
9. Дискретная случайная величина.
10. Вид функции распределения дискретной случайной величины.
11. Определение непрерывной скалярной случайной величины и основные свойства ее плотности распределения вероятностей.
12. Функция Лапласа и ее свойствами.
13. Определение обобщенной плотности распределения вероятностей дискретной скалярной случайной величины.
14. Понятие n -мерного случайного вектора и основные свойства его функции распределения.
15. Понятие дискретного случайного вектора.
16. Вид функции распределения дискретного случайного вектора.
17. Определение непрерывного случайного вектора. Основные свойства его плотности распределения вероятностей.
18. Понятие функции случайных величин.
19. Задача о нахождении закона распределения функции случайных величин (общий случай).
20. Определение независимых случайных величин. Основные свойства совместного закона распределения независимых случайных величин.
21. Понятие математического ожидания скалярной функции случайных величин.

22. Основные свойства математического ожидания.

23. Дисперсия скалярной случайной величины. Основные свойства дисперсии.

1. Определение вероятности по Лапласу (комбинаторное определение) гласит: Вероятность события - это отношение числа равновозможных исходов, благоприятствующих событию, к общему числу всех возможных равновозможных исходов. Другими словами, это процент благоприятных исходов от всех возможных.

Подробное объяснение:

Равновозможные исходы:

Это исходы, которые имеют одинаковую вероятность наступления. Например, при броске монетки, каждый из исходов (орел или решка) является равновозможным.

Благоприятствующие исходы:

Это исходы, которые приводят к наступлению заданного события. Например, если мы бросаем кубик и нас интересует, выпадет ли цифра 6, то благоприятствующий исход - это выпадение цифры 6.

Все возможные исходы:

Это все исходы, которые могут произойти в эксперименте. Например, при броске кубика возможные исходы - 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Формула:

$P(A) = m / n$, где: $P(A)$ - вероятность события A , m - число благоприятствующих исходов, n - общее число всех возможных исходов.

Пример:

Если мы бросаем кубик и хотим узнать вероятность выпадения цифры 6, то:

m (благоприятствующие исходы) = 1 (выпадение 6)

n (все возможные исходы) = 6 (1, 2, 3, 4, 5, 6)

$P(\text{выпадения } 6) = 1 / 6$

Важно: Комбинаторное определение вероятности справедливо только в том случае, когда все исходы равновозможны.

2. Геометрическое определение вероятности. Взаимосвязь между геометрическим определением вероятности и определением вероятности по Лапласу.

Геометрическая вероятность события определяется как отношение меры пространства, благоприятствующего этому событию, к общей мере пространства, где возможно наступление этого события. Определение Лапласа, или классическое определение вероятности, основано на подсчете числа благоприятных исходов к общему числу возможных исходов. Взаимосвязь между ними заключается в том, что если пространство элементарных событий является непрерывным, то оно может быть представлено геометрическим образом (например, область на плоскости, отрезок на прямой и т.д.).

Более подробно:

Геометрическая вероятность:

Событие, которое мы рассматриваем, связано с определенной областью (например, площадь, объем, длина).

Вероятность события вычисляется как отношение меры этой области к общей мере пространства.

Если мы, например, бросаем точку в окружность, то вероятность попадания точки в какую-то ее часть равна отношению площади этой части к площади всей окружности.

Определение Лапласа (классическое):

Предполагает конечное и равновероятное количество элементарных исходов.

Вероятность события равна числу благоприятных исходов (исходов, которые приводят к наступлению события) деленному на общее количество возможных исходов.

Взаимосвязь:

Если мы можем представить пространство элементарных исходов геометрически, то можно использовать геометрическое определение вероятности.

Классическое определение вероятности может быть применено, если число возможных исходов можно подсчитать и они равновероятны.

Примеры:

Длина отрезка: Если мы случайно выбираем точку на отрезке длины a , вероятность того, что она попадет в отрезок длины b , входящий в этот отрезок, равна b/a .

Площадь фигуры: Если мы бросаем точку в фигуру с площадью S , вероятность того, что она попадет в часть этой фигуры с площадью S_1 , равна S_1/S .

3. Аксиоматическое (по Колмогорову) определение вероятности.

В начале 30-х годов прошлого века аксиоматическое построение теории вероятностей создано академиком А.Н. Колмогоровым. Аксиомы теории вероятностей вводятся таким образом, чтобы вероятность события обладала основными свойствами статистической вероятности, характеризующей её практический смысл. В этом случае теория хорошо согласуется с практикой.

Пусть Ω - множество всевозможных исходов некоторого опыта (эксперимента). S - алгебра событий. Напомним, что совокупность подмножеств множества Ω называется *алгеброй (сигма алгеброй)*, если выполнены следующие условия:

1. Множество S содержит невозможное и достоверное событие.
2. Если события $A_1, A_2, A_3, \dots$ (конечное или счётное множество) принадлежат S , то множеству S принадлежит их сумма, произведение и дополнение (то есть, противоположное событие для каждого из событий до всего пространства Ω) этих событий.

Вероятностью называется числовая функция, $P(A)$ определённая на алгебре событий S , принимающая действительные значения и удовлетворяющая следующим трём аксиомам:

A1. Аксиома неотрицательности: вероятность любого события $A \in S$ неотрицательна, то есть
 $P(A) \geq 0$.

A2. Аксиома нормированности: вероятность достоверного события равна единице, т.е.
 $P(\Omega) = 1$.

A3. Аксиома аддитивности: вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е., если $A_i \cdot A_j = \emptyset$ ($i \neq j$), то

$$P\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k P(A_k)$$

Совокупность объектов $\{\Omega; S; P\}$, где Ω – пространство элементарных событий, S – алгебра событий, P – числовая функция, удовлетворяющая аксиомам A1. – A3., называется **вероятностным пространством** случайного эксперимента.

Вероятностное пространство служит математической моделью любого случайного явления. заданием этого пространства является аксиоматика теории вероятностей.

Свойства вероятностей. Перечислим ряд свойств вероятности, являющихся непосредственным следствием аксиом Колмогорова.

C 1. Вероятность невозможного события равна нулю, т.е.
 $P(\emptyset) = 0$.

C 2. Вероятность достоверного события равна единице, т.е.
 $P(\Omega) = 1$.

C 3. Вероятность любого события не превосходит единицы, т.е.
 $P(A) \leq 1$.

C 4. Если событие A влечёт за собой событие B , т.е. $A \subseteq B$, то верно неравенство
 $P(A) \leq P(B)$.

C 5. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, т.е.

$$\sum_{k=1}^n A_k = \Omega \quad \text{и} \quad A_i \cdot A_j = \emptyset; \quad (i \neq j),$$

тогда

$$\sum_k P(A_k) = 1.$$

Свойства 1-3 легко проверяются. Проверим свойства 4 и 5.

Поскольку $B = (B - A) + A$, при выполнении условия $A \subseteq B$, и следовательно $(B - A) \cdot A = \emptyset$ то согласно аксиоме A3 получим, что $P(B) = P(B - A) + P(A)$. Но по аксиоме A1 $P(B - A) \geq 0$, поэтому при отбрасывании этой неотрицательной величины имеем неравенство

$$P(B) = P(B - A) + P(A) \geq P(A),$$

Следовательно **С4** доказано.

Докажем свойство **5**. Поскольку $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$ то, согласно аксиомам **A2** и **A3**, получим

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = P(\Omega) = 1.$$

Замечание. В общем случае из того, что $P(A) = 0$, не следует $A = \emptyset$.

Пример. Из колоды, содержащей **36** карт, наудачу извлекают три карты. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один «король». Этот пример решим двумя способами.

Решение (первый способ). Пусть A – интересующее нас событие, B – появление одного короля, C – появление двух королей, D – появление трёх королей. Тогда $A = B + C + D$, причём события B, C, D несовместные. Поэтому

$P(A) = P(B) + P(C) + P(D)$. Найдём число всевозможных случаев выбора трёх карт

из **36**, оно равно C_{36}^3 . Число случаев благоприятных событиям B, C, D , соответственно равно $m_1 = C_4^1 \cdot C_{32}^2$; $m_2 = C_4^2 \cdot C_{32}^1$; $m_3 = C_4^3 \cdot C_{32}^0$. Таким образом,

$$P(A) = \frac{C_4^1 \cdot C_{32}^2 + C_4^2 \cdot C_{32}^1 + C_4^3 \cdot C_{32}^0}{C_{36}^3} \approx 0,31$$

Второй способ. Воспользуемся свойством **С2**. Находим $P(\bar{A})$, где $\bar{A}$ – противоположное событие к событию A (т.е. среди извлечённых карт наудачу

нет ни одного короля). Их число равно C_{32}^3 , Следовательно $P(\bar{A}) = \frac{C_{32}^3}{C_{36}^3} \approx 0,69$.
Значит $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,69 = 0,31$.

4. Определение: (а) независимых случайных событий; (б) полной группы случайных событий.

(а) Независимые случайные события – это события, наступление одного из которых не влияет на вероятность наступления другого. (б) Полная группа случайных событий – это совокупность событий, при которых гарантированно наступит одно и только одно из них.

Подробнее:

Независимые события:

Если события A и B независимы, то вероятность наступления обоих событий (A и B) равна произведению их вероятностей ($P(A \text{ и } B) = P(A) * P(B)$).

Полная группа событий:

Такая группа состоит из несовместных событий, то есть, они не могут произойти одновременно. При этом, вероятность наступления одного из событий группы равна 1 (или 100%).

5. Вывод формулы полной вероятности.

Формула полной вероятности позволяет вычислить вероятность события, основываясь на вероятностях условных событий. Она основана на принципе разделения события на различные гипотезы, которые вместе образуют полную

группу, и на вычислении вероятности этого события через условные вероятности в каждой из этих гипотез.

Вывод формулы полной вероятности:

Предположим, событие A может произойти под влиянием нескольких гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, которые образуют полную группу, то есть сумма их вероятностей равна 1 ($P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$). И пусть мы хотим найти вероятность события B , которое может произойти или не произойти под влиянием каждой из этих гипотез. Для этого мы используем формулу полной вероятности:

$$P(B) = P(B|H_1) * P(H_1) + P(B|H_2) * P(H_2) + \dots + P(B|H_n) * P(H_n).$$

Объяснение:

$P(B)$: Вероятность события B .

$P(B|H_i)$: Условная вероятность события B , произошедшего при условии, что гипотеза H_i верна.

$P(H_i)$: Вероятность гипотезы H_i .

Формула наглядно демонстрирует, что вероятность события B равна сумме вероятностей этого события, умноженных на вероятности соответствующих гипотез. Это позволяет нам, зная условные вероятности и вероятности гипотез, определить вероятность основного события.

Дополнительно:

Если у нас есть только две гипотезы, то формула полной вероятности выглядит так:

$$P(B) = P(B|A) * P(A) + P(B|A') * P(A').$$

Где:

A : Первая гипотеза.

A' : Противоположная гипотеза (не A).

$P(B|A)$: Условная вероятность B , произошедшего при условии A .

$P(B|A')$: Условная вероятность B , произошедшего при условии A' .

$P(A)$: Вероятность A .

$P(A')$: Вероятность A' .

6. Формула Байеса.

Формула Байеса (или теорема Байеса) (англ. *Bayes' theorem*) — соотношение различных предполагаемых вероятностей различных событий, которое дает вероятность, что какое-то событие A является результатом X ряда независимых друг от друга событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, который, возможно, привел к A .

еорема (формула Байеса):

$$P(B_i|A) = P(A|B_i)P(B_i) / \sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j),$$

где $P(A)$ — вероятность события A ,

$P(A|B)$ — вероятность события A при наступлении события B ,

$P(B|A)$ — вероятность наступления события B при истинности события A ,

$P(B)$ — вероятность наступления события B .

Доказательство:

Из замечания определения условной вероятности следует, что вероятность произведения двух событий равна:

$$P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)$$

Если вероятности под знаком суммы известны или допускают экспериментальную оценку, то

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}$$

◁

7. Определение независимых испытаний. Схема Бернулли.

Независимыми испытаниями называются такие, результат каждого из которых не зависит от результатов других испытаний. Схема Бернулли - это последовательность независимых испытаний, в каждом из которых возможны только два исхода: успех или неудача, причём вероятность успеха в каждом испытании одинакова.

Определение независимых испытаний:

Независимость:

Результат каждого испытания не влияет на результаты других испытаний.

Повторяемость:

Испытания могут быть повторены неограниченное количество раз.

Примеры:

Подбрасывание монеты, бросок игрального кубика, результаты последовательных измерений.

Схема Бернулли:

Два исхода:

В каждом испытании только два возможных исхода: успех или неудача.

Одинаковая вероятность:

Вероятность успеха (p) остается постоянной для всех испытаний.

Формула Бернулли:

Вероятность наступления k успехов в n испытаниях ($P(k)$) рассчитывается по формуле $P(k) = C(n, k) * p^k * q^{(n-k)}$, где $C(n, k)$ - число сочетаний, p - вероятность успеха, $q = 1 - p$ - вероятность неудачи.

Примеры:

Подбрасывание монеты, при котором "орёл" считается успехом, бросок игрального кубика, где выпадение 6 считается успехом.

По сути, схема Бернулли - это конкретный случай независимых испытаний, когда каждый эксперимент имеет только два возможных исхода и вероятность успеха фиксирована.

8. Определение скалярной случайной величины, основные свойства ее функции распределения.

Скалярной случайной величиной (ССВ) называется переменная, которая принимает значение из некоторого множества значений в результате случайного события. Функция распределения (ФР) ССВ – это функция, которая показывает вероятность того, что случайная величина примет значение, не превышающее определенное значение. Основные свойства ФР ССВ: монотонность, ограниченность, непрерывность справа.

1. Определение скалярной случайной величины:

Случайная величина (СВ) – это переменная, значение которой зависит от случайного события. Скалярная СВ – это СВ, принимающая одно числовое значение, а не вектор или матрицу.

2. Функция распределения (ФР):

Определение:

Функция распределения случайной величины X ($F(x)$) – это функция, которая определяет вероятность того, что СВ X примет значение, меньшее или равное x : $F(x) = P(X \leq x)$.

Для непрерывных СВ:

$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, где $f(t)$ – плотность распределения вероятностей.

Для дискретных СВ:

$F(x)$ – ступенчатая функция, принимающая значение 1 для $x \geq x_k$, где x_k – возможные значения СВ.

Значение ФР:

$F(x) = P(X \leq x)$ – это вероятность того, что СВ X примет значение не больше, чем x .

3. Основные свойства ФР скалярной случайной величины:

Монотонность:

$F(x)$ всегда монотонно возрастает, то есть $F(x) \leq F(y)$, если $x \leq y$.

Ограниченность:

$F(x)$ всегда находится в пределах от 0 до 1, то есть $0 \leq F(x) \leq 1$.

Непрерывность справа:

В любой точке x правая граница $F(x)$ есть $F(x)$, а левая граница $F(x-)$ есть $F(x-)$.

Свойства в точках:

$F(-\infty) = 0$

$F(+\infty) = 1$

$F(x)$ непрерывна справа

Непрерывность для непрерывных СВ:

Для непрерывных СВ ФР непрерывна в каждой точке.

Для дискретных СВ:

ФР непрерывна справа, но не обязательно в любой точке.

Ступенчатая функция:

Для дискретных СВ ФР – это ступенчатая функция, с прыжками в местах возможного значения СВ.

9. Дискретная случайная величина.

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, множество значений которой конечно или счетно, а каждое значение имеет определенную вероятность. Это означает, что значения этой величины можно перечислить и распределить по вероятностям.

Подробнее:

Определение:

Случайная величина, принимающая значения, которые можно перечислить (то есть множество значений является конечным или счетным), называется дискретной.

Примеры:

Число выпавших очков при бросании игральной кости, число детей в семье, количество деталей, не прошедших контроль качества.

Счетность множества значений:

Множество значений дискретной случайной величины может быть конечным (например, число очков на кости) или бесконечным (например, число выстрелов до первого попадания).

Вероятности значений:

Каждое значение дискретной случайной величины имеет свою вероятность, и сумма вероятностей всех возможных значений равна 1.

Закон распределения:

Связь между возможными значениями и их вероятностями называется законом распределения дискретной случайной величины.

10. Вид функции распределения дискретной случайной величины.

Функция распределения дискретной случайной величины (ДССВ) имеет вид ступенчатой функции, где каждый "ступенек" соответствует вероятности конкретного значения ДССВ. Она представляет собой функцию, которая для каждого значения аргумента (возможного значения ДССВ) возвращает сумму вероятностей всех значений ДССВ, не превышающих это значение.

Подробнее:

1. Определение:

Функция распределения ДССВ ($F(x)$) для каждой точки x , принимает значение, равное сумме вероятностей всех значений ДССВ, которые не превосходят x .

2. Ступенчатая форма:

Поскольку ДССВ может принимать только дискретные значения, функция распределения, в свою очередь, является ступенчатой функцией. На графике, она будет иметь вид ступеней, где каждый "ступенек" соответствует вероятности конкретного значения ДССВ.

3. Пример:

Если дискретная случайная величина (например, количество выпавших орлов при бросании монетки) может принимать значения 0, 1, 2, и если вероятность выпадения 0 орлов - 0.25, 1 орла - 0.5, и 2 орлов - 0.25, то функция распределения будет иметь вид:

- a. $F(0) = 0.25$ (вероятность выпадения 0 или меньше 0 орлов - только 0 орлов)
- b. $F(1) = 0.25 + 0.5 = 0.75$ (вероятность выпадения 1 или меньше 1 орлов - 0 и 1 орлы)
- c. $F(2) = 0.25 + 0.5 + 0.25 = 1.0$ (вероятность выпадения 2 или меньше 2 орлов - 0, 1 и 2 орлы)
- d. И в любом другом случае, $F(x)$ будет равно 0 (если $x < 0$) или 1 (если $x > 2$).

4. Основные свойства:

- e. $F(x)$ - монотонно неубывающая функция.
- f. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.
- g. $F(x)$ непрерывна справа.
- h. $F(x) = P(X \leq x)$, где X - ДССВ.

11. Определение непрерывной скалярной случайной величины и основные свойства ее плотности распределения вероятностей.

Непрерывная скалярная случайная величина — это величина, множество возможных значений которой представляет собой непрерывный отрезок или интервал на числовой прямой. Ее характеризует плотность распределения вероятностей, которая является производной функции распределения.

Определение:

Непрерывная скалярная случайная величина (X):

величина, значения которой могут принимать любые значения в некотором интервале (или интервалах) на числовой прямой.

Функция распределения (F(x)):

вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше или равно x : $F(x) = P(X \leq x)$.

Плотность распределения вероятностей (f(x)):

производная функции распределения: $f(x) = F'(x)$.

Основные свойства плотности распределения вероятностей:

1. Неотрицательность:

$f(x) \geq 0$ для всех x .

2. Нормировка:

интеграл плотности по всей области определения равен 1: $\int f(x) dx = 1$.

3. Вероятность попадания в интервал:

вероятность того, что случайная величина X попадет в интервал $[a, b]$ равна интегралу плотности от a до b : $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$.

4. Не является вероятностью конкретного значения:

Вероятность, что $X = x$ равна нулю для непрерывной случайной величины, так как плотность распределения описывает распределение вероятности в бесконечно малых интервалах, а не на точках.

12. Функция Лапласа, ее свойства.

Найдем вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал.

$\wedge$ - обозначила степень, потому что степень в степени изобразить не получается, а скобками $()$ обозначила то, что в степень возводится. Смотрите внимательно!!!

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-((x-m)^2)/(2(\sigma^2))} dx$$

Обозначим

$$\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t, \quad \frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}} = \alpha, \quad \frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}} = \beta$$

$$\text{Тогда } P(a < X < b) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-(t^2)} \sigma\sqrt{2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-(t^2)} dt = \frac{1}{2} [\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)]$$

Так как интеграл $\int e^{-(t^2)} dt$ не выражается через элементарные функции, то вводится в рассмотрение функция

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-(t^2)} dt,$$

которая называется функцией Лапласа или интегралом вероятностей.

Значения этой функции при различных значениях x подсчитаны и приводятся в специальных таблицах.

Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

1. $\Phi(0) = 0$

2. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$

3. $\Phi(\infty) = 1$

Функцию Лапласа называют также функцией ошибок и обозначают $\text{erf } x$.

Еще используется **нормированная** функция Лапласа, которая связана с функцией Лапласа соотношением:

$$\bar{\Phi}(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-(t^2)/2} dt.$$

13. Определение обобщенной плотности распределения вероятностей дискретной скалярной случайной величины.

Непрерывной называют случайную величину X , функцию распределения

которой $F(x)$ можно представить в виде: $F(x) = \int_{-\infty}^x p(y)dy$. Функцию $p(x)$ называют плотностью распределения (вероятностей) случайной величины X .

$p(x) = F'(x)$. Функцию распределения $F(x)$ называют *интегральным законом распределения* случайной величины, а плотность распределения $p(x)$ – *дифференциальным законом распределения* той же случайной величины.

Плотность распределения обладает следующими **свойствами**:

1. $p(x) \geq 0$

2. $P\{x_1 \leq X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$

4. $P\{x \leq X < x + \Delta x\} \approx p(x)\Delta x$

5. $P\{X = x\} = 0$

Доказательство:

1) Функция $F(x)$ является неубывающей, поэтому $p(x) = F'(x) \geq 0$.

2) $P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} p(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$

3) В частности, если $x_1 = -\infty, x_2 = +\infty$, то событие $\{-\infty < X < +\infty\}$ является достоверным.

4) $P\{x \leq X < x + \Delta x\} = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x) \approx dF(x) = F'(x)\Delta x = p(x)\Delta x$

5) Функция распределения – непрерывна, поэтому $P\{X = x\} = 0 = F(x) - F(x)$

14. Понятие n -мерного случайного вектора и сформулируйте основные свойства его функции распределения.

Совокупность случайных величин $X_1 = X_1(\omega), \dots, X_n = X_n(\omega)$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, называют **многомерной (n -мерной) случайной величиной**, или **n -мерным случайным вектором**. При этом сами случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ называют координатами случайного вектора.

Функцией распределения (вероятностей) $F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$ n -мерного случайного вектора $(X_1, \dots, X_n)$ называют функцию, значение которой в точке $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ равно вероятности совместного осуществления (пересечения) событий $\{X_1 < x_1\}, \dots, \{X_n < x_n\}$, т.е. $F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n)$.

В частности, при $n=2$ имеем двумерную функцию распределения.

Свойства двумерной функции распределения:

1. $0 \leq F(x_1, x_2) \leq 1$

2. $F(x_1, x_2)$ – неубывающая функция по каждому из аргументов x_1, x_2
3. $F(-\infty, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0$
4. $F(+\infty, +\infty) = 1$
5. $P\{a_1 \leq X_1 \leq b_1, a_2 \leq X_2 \leq b_2\} = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$
6. $F(x_1, x_2)$ – непрерывная слева в любой точке $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ по каждому из аргументов x_1, x_2 функция
7. $F_{X_1, X_2}(x, +\infty) = F_{X_1}(x), F_{X_1, X_2}(+\infty, x) = F_{X_2}(x)$

Доказательство:

1. $F(x_1, x_2) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} \in [0, 1]$
 $"x_1 < y_1 \Rightarrow \{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} \subset \{X_1 \leq y_1, X_2 \leq x_2\} \Rightarrow P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} \leq P\{X_1 \leq y_1, X_2 \leq x_2\} \Rightarrow P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} \leq F(y_1, x_2)$
2. $P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} \leq F(y_1, x_2)$
3. События $\{X_1 < -\infty\}$ и $\{X_2 < -\infty\}$ являются невозможными, а пересечение невозможного события с любым событием также невозможное событие, вероятность которого равна нулю
4. События $\{X_1 < +\infty\}$ и $\{X_2 < +\infty\}$ так же, как и их пересечение, являются достоверными, вероятность которых равна единице
- 5) Сами
- 6) (пусть $x_1, \dots, x_n, \dots$ – любая возрастающая последовательность чисел, стремящаяся к x . Событие $\{X < x_n\}$ является объединением событий $\{X < x_n\}$. Снова воспользовавшись аксиомой непрерывности, приходим к утв)
7. Событие $\{X_1 < +\infty\}$ является достоверным, поэтому $\{X_1 < +\infty\} \subset \{X_2 \leq x_2\}$

15. Понятие дискретного случайного вектора.

Дискретным случайным вектором является вектор, компоненты которого являются дискретными случайными величинами. Это значит, что множество значений, которые может принимать каждый из компонентов вектора, является либо конечным, либо счётным (непрерывных интервалов нет).

1. Дискретная случайная величина:

Дискретная случайная величина – это случайная величина, множество значений которой конечно или счётное. Например, число выпавших орлов при броске монеты, количество клиентов, посетивших магазин за день, или число дефектных деталей на заводе.

2. Случайный вектор:

Случайный вектор – это вектор, компоненты которого являются случайными величинами.

3. Дискретный случайный вектор:

Если все компоненты случайного вектора являются дискретными случайными величинами, то такой вектор называется дискретным.

4. Функция совместной вероятности:

Для дискретного случайного вектора существует функция совместной вероятности (или функция массы вероятности), которая определяет вероятность того, что вектор примет конкретное значение.

5. Пример:

Вектор, состоящий из количества очков при броске двух игральных костей (каждая компонента - дискретная случайная величина), является дискретным случайным вектором. Множество значений этого вектора - множество пар чисел, например (1,1), (1,2), (1,3) и так далее.

6. Различие от непрерывного:

В отличие от дискретного, непрерывный случайный вектор может принимать значения из непрерывного интервала. Примером может служить вектор координат точки, выбранной случайным образом на плоскости.

16. Вид функции распределения дискретного случайного вектора.

Определение. Случайный вектор $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ называется дискретным, если множество его возможных значений $\mathbf{X}$ конечно или счетно:

$$\mathbf{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N\} \text{ или } \mathbf{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, \dots\},$$

где $\vec{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$, $i = 1, 2, \dots$.

Из определения следует, что случайный вектор является дискретным тогда и только тогда, когда все его координаты являются дискретными случайными величинами.

Рассмотрим более подробно случай двумерного дискретного случайного вектора (X, Y) , принимающего конечное число значений

$$\begin{array}{cccc} & Y_1 & Y_2 & \dots & Y_m \\ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{array} & \begin{array}{c} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{array} & \begin{array}{c} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{array} & \dots & \begin{array}{c} p_{1m} \\ p_{2m} \\ \vdots \\ p_{nm} \end{array} \end{array} \quad (3.2)$$

Как и в одномерном случае, подобную информацию о дискретном случайном векторе (X, Y) записывают в виде таблицы, но с двумя входами: -----таблица которую называют законом распределения дискретного случайного вектора (двумерным дискретным законом распределения или совместным законом распределения дискретных случайных величин X и Y).

График функции распределения $F_{XY}(x, y)$ дискретного случайного вектора (X, Y) является кусочно-постоянным со скачками в точках (x_i, y_j) , являющихся его возможными значениями, величина которых определяется вероятностями p_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^m P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^m p_{ij}, \quad i = \overline{1, n} \quad (3.3)$$

Таким образом, закон распределения случайной величины X имеет вид:

$$\begin{array}{cccc} X & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ F & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array}$$

где в соответствии с (3.3) вероятность $p_i = \sum_{j=1}^m p_{ij}$ получается суммированием в i -ой строке таблицы (3.2) вероятностей $p_{ij}, i = \overline{1, n}$.

$$q_j = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i=1}^n p_{ij}, j = \overline{1, m} \quad (3.4)$$

и поэтому закон распределения случайной величины Y имеет вид:

где в соответствии с (3.4) вероятность $q_j = \sum_{i=1}^n p_{ij}$ получается суммированием в j -ом столбце таблицы (3.2) вероятностей $p_{ij}, j = \overline{1, m}$.

Начнем с рассмотрения двумерного случайного вектора (X, Y) .

Определение. Случайный вектор (X, Y) , заданный на вероятностном пространстве (W, F, P) , называется непрерывным (или имеющим непрерывный закон распределения), если существует такая функция $f_{XY}(x, y)$, двух действительных переменных, что для любой точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ функция распределения $F_{XY}(x, y)$ случайного вектора (X, Y) допускает представление:

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(u, v) du dv. \quad (3.5)$$

Функция $f_{XY}(x, y)$ при этом называется плотностью вероятностей случайного вектора (X, Y) или двумерной плотностью вероятностей или совместной плотностью вероятностей случайных величин X и Y .

Из определения (3.5) следует:

1. Функция распределения $F_{XY}(x, y)$ непрерывного случайного вектора является непрерывной по x и по y (как двойной интеграл с переменными верхними пределами);
2. Функция распределения $F_{XY}(x, y)$ непрерывного случайного вектора является дифференцируемой по x и по y во всех точках $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, являющихся точками непрерывности двумерной плотности вероятностей $f_{XY}(x, y)$, и при этом имеет место равенство:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (3.6)$$

Свойства двумерной плотности вероятностей

2f1). Двумерная плотность вероятностей $f_{XY}(x, y)$ является функцией неотрицательной: $f_{XY}(x, y) \geq 0$ для любых $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2f2). $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(u, v) du dv = 1$ - условие нормировки.

2f3). Вероятность попадания непрерывного случайного вектора (X, Y) в любое борелевское множество $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ определяется формулой:

$$P\{(X, Y) \in B\} = \iint_B f_{XY}(x, y) dx dy.$$

2f4). Координаты непрерывного случайного вектора (X, Y) с плотностью вероятностей $f_{XY}(x, y)$ являются непрерывными случайными величинами, плотности вероятностей которых $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ (маргинальные плотности вероятностей), выражаются через $f_{XY}(x, y)$ по формулам:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx, \quad (3.8)$$

в точках непрерывности функций $f_X(x)$, $f_Y(y)$ и $f_{XY}(x, y)$.

17. Определение непрерывного случайного вектора. Основные свойства его плотности распределения вероятностей.

Непрерывным случайным вектором является вектор, компоненты которого представляют собой непрерывные случайные величины. Плотность распределения вероятностей непрерывного случайного вектора - это функция, которая характеризует распределение вероятностей вектора и обладает определенными свойствами.

Определение:

Непрерывный случайный вектор

$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ — это вектор, компоненты которого

$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$

— это вектор, компоненты которого

$X_1, X_2, \dots, X_n$ являются непрерывными случайными величинами. Это означает, что каждая компонента может принимать любое значение из некоторого непрерывного интервала или множества интервалов на числовой прямой.

$X_1, X_2, \dots, X_n$

являются непрерывными случайными величинами. Это означает, что каждая компонента может принимать любое значение из некоторого непрерывного интервала или множества интервалов на числовой прямой.

Плотность распределения вероятностей:

Плотность распределения вероятностей

$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — это функция, которая определяет вероятность того, что

$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

непрерывного случайного вектора

$\mathbf{X}$

$\mathbf{X}$

— это функция, которая определяет вероятность того, что

$\mathbf{X}$

$\mathbf{X}$

принимает значение в окрестности

$\mathbf{x}$

$\mathbf{x}$

Она удовлетворяет следующим свойствам:

1. Неотрицательность:

$f(x) \geq 0$ f open paren bold x close paren is greater than or equal to 0
 $f(x) \geq 0$
 для всех

$x \in \mathbb{R}^n$ bold x is an element of $\mathbb{R}^n$
 $x \in \mathbb{R}^n$

2. Нормализация:

$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ integral under-script negative infinity over-script infinity
 end-scripts $\dots$ integral under-script negative infinity over-script infinity end-scripts f
 open paren bold x close paren space d bold x equals 1
 $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Это означает, что общая вероятность должна быть равна 1.

3. Вероятность попадания в область:

$P(X \in A) = \int_A \dots \int_A f(x) dx$ P open paren bold $\cap$ X is an element of $\cap$ A close
 paren equals integral under-script $\cap$ A end-scripts $\dots$ integral under-script $\cap$ A
 end-scripts f open paren bold x close paren space d bold x
 $P(X \in A) = \int_A \dots \int_A f(x) dx$
 , где

$A \subset \mathbb{R}^n$ $\cap$ A is a subset of $\mathbb{R}^n$
 $A \subset \mathbb{R}^n$

– некоторая область в пространстве.

- Модуль 2. Тема 3. Плотность распределения и ее свойства

Определение. Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называется первая производная от ее функции расп...

Главная - ДГУ

Основные свойства плотности распределения:

Производная функции распределения:

В некоторых случаях плотность распределения вероятностей может быть получена как производная от функции распределения по каждой компоненте вектора.

Моменты:

Плотность распределения позволяет рассчитывать различные моменты случайного вектора, такие как математическое ожидание, дисперсия, ковариация и корреляция.

Преобразование:

Плотность распределения может быть преобразована в новую плотность при изменении координат или при применении других преобразований.

Непрерывность:

Плотность распределения, как правило, является непрерывной функцией.

В целом, плотность распределения вероятностей непрерывного случайного вектора - это мощный инструмент для анализа и понимания характеристик многомерных случайных явлений.

18. Понятие функции случайных величин.

Функцией случайных величин является любая функция, определенная на множестве всех элементарных событий и принимающая значения в некотором множестве значений. Другими словами, это отображение, которое каждому исходу случайного эксперимента (элементарному событию) сопоставляет определенное значение.

1. Более формально, пусть

2. $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ start-set ω sub i end-set sub i equals 1 end-sub raised to the exponent n end-exponent

3. $\{\omega_i\}_{i=1}^n$

4. - пространство элементарных событий, и пусть

5. $\xi(\omega)$ xi open paren ω close paren

6. $\xi(\omega)$

7. - случайная величина, определенная на этом пространстве. Тогда функцией случайной величины

8. ξ xi

9. ξ

10. будет любая функция

11. $f(\xi(\omega))$ f open paren xi open paren ω close paren close paren

12. $f(\xi(\omega))$

13., где

14. f

15. f

16. - некоторая функция, сопоставляющая значениям

17. $\xi(\omega)$ xi open paren ω close paren

18. $\xi(\omega)$

19. новые значения. Например, если

20. ξx_i

21. ξ

22.- число выпавших очков при броске кубика, то

23. $f(\xi) = \xi^2$ if ξ is the number of points that fall when a die is thrown

24. $f(\xi) = \xi^2$

25. будет функцией случайной величины, дающей квадрат числа выпавших очков.

26. Функция случайной величины также является случайной величиной, поскольку ее значения определяются результатами случайного эксперимента. Функции случайных величин играют важную роль в статистике и теории вероятностей, позволяя анализировать распределения, математические ожидания и другие характеристики случайных величин.

19. Задача о нахождении закона распределения функции случайных величин (общий случай).

Задача нахождения закона распределения функции случайной величины (общий случай) сводится к определению распределения вероятностей для нового случайного события, которое является функцией от исходной случайной величины. Для дискретных случайных величин этот вопрос решается с помощью непосредственной вероятностной связи, а для непрерывных - через анализ функции распределения или плотности вероятности исходной величины и новой функции.

Общий случай дискретной случайной величины:

1. Определение функции:

Пусть

X is a discrete random variable, taking values

$x_1, x_2, \dots, x_n$

- дискретная случайная величина, принимающая значения

$x_1, x_2, \dots, x_n$

$x_1, x_2, \dots, x_n$

с вероятностями

$p_1, p_2, \dots, p_n$

$p_1, p_2, \dots, p_n$

соответственно. И пусть

$Y=g(X)$ cap Y equals g open paren cap X close paren

$Y=g(X)$

- функция, зависящая от

X cap X

X

2. Нахождение значений

Y cap Y

Y

Находим все возможные значения

$y_1, y_2, \dots, y_m$ y sub 1 comma y sub 2 comma point point point comma y sub m

$y_1, y_2, \dots, y_m$

, которые может принимать

Y cap Y

Y

, при этом

$y_i=g(x_j)$ y sub i equals g open paren x sub j close paren

$y_i=g(x_j)$

, где

x_j x sub j

x_j

- какое-то из значений

X cap X

X

3. Определение вероятностей:

Для каждого значения

y_i y sub i

y_i

находим вероятность

$P(Y=y_i)$ cap P open paren cap Y equals y sub i close paren

$$P(Y=y_i)$$

, которая определяется как сумма вероятностей тех значений

$$X \text{ с } P(X=x_j)$$

$$X$$

, которые приводят к этому значению

$$Y \text{ с } P(Y=y_i)$$

$$Y$$

. Формула:

$$P(Y=y_i) = \sum_{j: g(x_j)=y_i} P(X=x_j) \text{ с } P(Y=y_i) = \sum_{j: g(x_j)=y_i} P(X=x_j)$$

$$P(Y=y_i) = \sum_{j: g(x_j)=y_i} P(X=x_j)$$

Общий случай непрерывной случайной величины:

1. Определение функции:

Пусть

$$X \text{ с } P(X=x)$$

$$X$$

- непрерывная случайная величина с функцией распределения

$$F_X(x) \text{ с } F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$F_X(x)$$

и плотностью вероятности

$$f_X(x) \text{ с } f_X(x) = P(X \in [x, x+dx])$$

$$f_X(x)$$

. И пусть

$$Y=g(X) \text{ с } Y=g(X)$$

$$Y=g(X)$$

- функция, зависящая от

$$X \text{ с } P(X=x)$$

$$X$$

2. Нахождение закона распределения

$Y \in Y$
 Y

(через функцию распределения):
Для функции распределения

$F_Y(y) = P(Y \leq y)$
 $F_Y(y)$
имеем:

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = P(X \leq y)$
 $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$

Далее необходимо решить неравенство

$g(X) \leq y \iff X \leq g^{-1}(y)$
 $g(X) \leq y$
относительно

$X \in X$
 X

и найти вероятность этого события, используя функцию распределения

$F_X(x) = P(X \leq x)$
 $F_X(x)$

3. Нахождение закона распределения

$Y \in Y$
 Y

(через плотность вероятности):
Если

$g(x)$
 $g(x)$
монотонна и дифференцируема, то плотность вероятности

$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot |g'(g^{-1}(y))|$

$$f_Y(y)$$

можно найти по формуле:

$$f_Y(y) = f_X(x) \cdot \frac{dx}{dy} \quad \text{sub cap Y open paren y close paren equals f sub cap X open paren x close paren center dot d x over d y end-fraction}$$

$$f_Y(y) = f_X(x) \cdot \frac{dx}{dy}$$

, где

$$x = g^{-1}(y) \quad \text{x equals g raised to the exponent negative 1 end-exponent open paren y close paren}$$

$$x = g^{-1}(y)$$

.

Пример (дискретный случай):

Пусть

$$X \text{ cap } X$$

X

принимает значения 1, 2, 3 с вероятностями 0.3, 0.4, 0.3 соответственно. И пусть

$$Y = X^2 \text{ cap } Y \text{ equals cap X squared}$$

$$Y = X^2$$

. Тогда

$$Y \text{ cap } Y$$

Y

принимает значения 1, 4, 9.

•

$$P(Y=1) = P(X=1) = 0.3 \text{ cap } P \text{ open paren cap Y equals 1 close paren equals cap } P \text{ open paren cap X equals 1 close paren equals 0.3}$$

$$P(Y=1) = P(X=1) = 0.3$$

•

$$P(Y=4) = P(X=2) = 0.4 \text{ cap } P \text{ open paren cap Y equals 4 close paren equals cap } P \text{ open paren cap X equals 2 close paren equals 0.4}$$

$$P(Y=4) = P(X=2) = 0.4$$

•

$$P(Y=9) = P(X=3) = 0.3 \text{ cap } P \text{ open paren cap Y equals 9 close paren equals cap } P \text{ open paren cap X equals 3 close paren equals 0.3}$$

$$P(Y=9) = P(X=3) = 0.3$$

Пример (непрерывный случай):

Пусть

$X \sim \text{Unif}(0, 1)$

X

- равномерно распределенная случайная величина на интервале

с плотностью

$$f_X(x) = 1 \text{ for } 0 \leq x \leq 1$$

$$f_X(x) = 0 \text{ elsewhere}$$

для

$x \in \mathbb{R}$ is an element of

$\mathbb{R}$

. И пусть

$$Y = X^2$$

$$Y = X^2$$

. Тогда функция распределения

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$$

$$F_Y(y)$$

для

$y \in \mathbb{R}$ is an element of

$\mathbb{R}$

:

•

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = \sqrt{y}$ for $0 \leq y \leq 1$
 $F_Y(y) = 0$ for $y < 0$
 $F_Y(y) = 1$ for $y > 1$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = \sqrt{y}$$

(так как

$X \geq 0$ for $X \in [0, 1]$

$X \geq 0$

).

Плотность вероятности

$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2} y^2 \right) = y$ for $0 \leq y \leq 1$
the square root of y end-root equals the fraction with numerator 1 and denominator 2 the square root of y end-root end-fraction

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} \sqrt{y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

20. Определение независимых случайных величин. Основные свойства совместного закона распределения независимых случайных величин.

Независимыми случайными величинами называются величины, у которых знание значения одной из них не влияет на вероятность наступления значения другой. Совместный закон распределения независимых случайных величин может быть представлен как произведение их отдельных функций распределения или плотностей вероятности.

Определение независимых случайных величин:

Две случайные величины X и Y называются независимыми, если вероятность любого события, связанного с X , не зависит от того, какое значение приняла случайная величина Y , и наоборот. Другими словами, знание значения одной случайной величины не дает никакой информации о значении другой.

Основные свойства совместного закона распределения независимых случайных величин:

Совместная функция распределения:

Если X и Y - независимые случайные величины, то их совместная функция распределения может быть представлена как произведение их отдельных функций распределения: $F(x, y) = F_X(x) * F_Y(y)$.

Совместная функция плотности:

Аналогично, если X и Y - непрерывные случайные величины, то их совместная функция плотности вероятности также может быть представлена как произведение их отдельных функций плотности: $f(x, y) = f_X(x) * f_Y(y)$.

Математическое ожидание:

Если X и Y - независимые случайные величины, то математическое ожидание их произведения равно произведению их математических ожиданий: $E(XY) = E(X) * E(Y)$.

Дисперсия:

Если X и Y - независимые случайные величины, то дисперсия их суммы равна сумме их дисперсий: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

Ковариация:

Если X и Y - независимые случайные величины, то их ковариация равна нулю: $Cov(X, Y) = 0$.

21. Понятие математического ожидания скалярной функции случайных величин.

Математическим ожиданием скалярной функции случайных величин является число, равное сумме (или интегралу, в зависимости от типа случайной

величины) произведения значений функции на соответствующие им вероятности (или плотности распределения). Оно характеризует среднее значение функции случайных величин.

Для дискретных случайных величин:

Пусть X - дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$ соответственно. Пусть $y = g(X)$ - скалярная функция случайной величины X . Тогда математическое ожидание функции $g(X)$ определяется как:

$$M[g(X)] = \sum (g(x_i) * p_i)$$

где суммирование ведется по всем возможным значениям $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Для непрерывных случайных величин:

Пусть X - непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$. Пусть $y = g(X)$ - скалярная функция случайной величины X . Тогда математическое ожидание функции $g(X)$ определяется как:

$$M[g(X)] = \int (g(x) * f(x)) dx$$

где интегрирование ведется по всем возможным значениям x .

В целом, математическое ожидание функции случайной величины (скалярной или векторной) дает нам среднее значение этой функции, если бы мы провели большое количество экспериментов и наблюдали за значениями этой функции. Это позволяет нам предсказывать среднее значение этой функции для данного распределения случайной величины.

22. Основные свойства математического ожидания.

Основные свойства математического ожидания включают линейность, аддитивность (для независимых случайных величин), монотонность, неотрицательность, и свойство для полной вероятности.

Пояснение:

1. Линейность:

Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин равно линейной комбинации их математических ожиданий: $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$, где a и b - константы, X и Y - случайные величины.

2. Аддитивность (для независимых случайных величин):

Если случайные величины X и Y независимы, то математическое ожидание их суммы равно сумме их математических ожиданий: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

3. Монотонность:

Если $X \leq Y$ для всех значений, то $E(X) \leq E(Y)$.

4. Неотрицательность:

Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения, то её математическое ожидание также неотрицательно: $E(X) \geq 0$.

5. Полная вероятность:

Для разбиения множества всех возможных значений X на события A , математическое ожидание $E(X)$ равно сумме по всем событиям A произведения условного математического ожидания $E(X|A)$ на вероятность $P(A)$: $E(X) = \sum E(X|A)P(A)$.

6. Независимость:

Если случайные величины X и Y независимы, то математическое ожидание их произведения равно произведению их математических ожиданий: $E(XY) = E(X)E(Y)$.

23. Дисперсия скалярной случайной величины. Основные свойства дисперсии. Дисперсией скалярной случайной величины называется мера рассеяния или разброса значений этой случайной величины вокруг её математического ожидания. Она представляет собой средний квадрат отклонений от математического ожидания. Основные свойства дисперсии:

Дисперсия любой случайной величины всегда неотрицательна, то есть, $D[X] \geq 0$.

Дисперсия постоянной величины равна нулю, $D[a] = 0$.

Если случайная величина является линейной комбинацией других случайных величин, то её дисперсия равна сумме дисперсий этих величин, учитывая ковариации (в случае независимых величин ковариации равны нулю).

Дисперсия суммы двух случайных величин равна сумме их дисперсий плюс дважды их ковариация: $D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2\text{cov}(X, Y)$.

Дополнительные пояснения:

Дисперсия, как и среднеквадратическое отклонение, является важным параметром для оценки разброса случайной величины.

Чем больше дисперсия, тем больше разброс значений случайной величины от её математического ожидания.

В статистике дисперсия используется для анализа распределений, сравнения разных выборок и оценки точности оценок.

5 Учебно-методическое обеспечение дисциплины

5.1 Основная литература

2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для бакалавров. - 12-е изд. - М.: Юрайт, 2013. - 479 с.

5.2 Дополнительная литература

3. Ниворожкина, Л. И. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов / Л. И. Ниворожкина, З. А. Морозова. - М.: Эксмо, 2008. - 432 с.
4. Балдин, К. В. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. - 2-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 473 с.- режим доступа - ZNANIUM.COM

5.3 Периодические издания

2. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» - <http://www.mathnet.ru/tvp>

5.4 Интернет-ресурсы

3. Репозиторий Самарского университета - <http://repo.ssau.ru/handle/Uchebnye-izdaniya/Teoriya-veroyatnostei-Matematicheskaya-statistika-Elektronnyi-resurs-praktikum-po-matematike-80422>
4. Википедия – Свободная энциклопедия - https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D1%80%D0%BE%D1%8F%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9

6 Оценочные средства для проверки освоения изученных компетенций

ОПК – 1 – Способен осуществлять научное исследование в сфере профессиональной деятельности на основе современной методологии

Темы практических занятий

№ занятия	№ раздела	Тема	Кол-во часов
1-8	1	Случайные события	16
9-16	2	Случайные величины	16
17-24	3	Математическая статистика	16
		Итого:	48

Тестирование

ОПК – 1 – Способен осуществлять научное исследование в сфере профессиональной деятельности на основе современной методологии

I. Тип задания: выбор одного правильного варианта из предложенных вариантов ответов

Уровень базовый

Время 10-15 минуты

1. Вероятность события $P(A)$ это:

а) отношение $P(A) = \frac{m}{n}$, где m - число исходов испытаний,

благоприятствующих появлению события A , n - общее число исходов испытаний;

б) числовая функция, определенная на поле событий F и удовлетворяющая трем условиям:

в) $P(A) \geq 0$; 2. $P(W) = 1$; 3. $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.

г) числовая мера появления события A в n испытаниях;

iii) отношение $P(A) = \frac{m}{n}$, где m - число появлений событий A в n испытаниях;

iv) число элементарных событий в некотором подмножестве $A \in W$.

Ответ: Б)

2. Какие способы задания вероятностей вы знаете:

i) классический, динамический, точечный, геометрический;

ii) статистический, геометрический, биномиальный, классический;

iii) геометрический, классический, дискретный, статистический;

iv) классический, геометрический, точечный, статистический;

v) классический, геометрический, статистический, комбинаторный.

Ответ: В)

3. Когда применяется классический способ задания вероятности:

i) пространство элементарных событий бесконечно, все события равновозможные и независимые;

ii) пространство элементарных событий замкнуто, все события независимы;

iii) пространство элементарных событий конечно, все события равновозможные;

iv) пространство элементарных событий конечно, все элементарные события независимы.

Ответ: В)

4. Когда применяется геометрический способ задания вероятности:

i) пространство элементарных событий бесконечно, все события равновозможные и независимые;

ii) пространство элементарных событий замкнуто, все события независимы;

iii) пространство элементарных событий конечно, все события равновозможные;

iv) пространство элементарных событий конечно, все элементарные события независимы.

Ответ: А)

5. Назовите основные аксиомы вероятностей:

i) $P(A) \geq 0$; $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$; $P(W) = 1$;

ii) $P(A) \geq 0$; $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$; $P(W) \geq 1$;

iii) $P(A) > 0$; $P(W) > 1$; $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.

$$d) P(A_k) = \frac{a_k}{\sum_k a_k} P(A_k); P(A) > 0; P(W) = 1.$$

Ответ: А)

6. Суммой двух событий A и B называют:

- ก) событие $A \cap B$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих или событию A или B ;
- ข) событие $A + B$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих или событию A или B ;
- ค) событие $A + B$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих и событию A и B ;
- ด) событие $A \cdot B$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих и событию A и B ;
- ฉ) событие $A \in B$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих и событию A и B ;

Ответ: Б)

7. Произведением двух событий A и B называют:

- ก) событие $A \cap B$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих или событию A или B ;
- ข) событие $A + B$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих или событию A или B ;
- ค) событие $A + B$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих и событию A и B ;
- ด) событие $A \cdot B$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих и событию A и B ;
- ฉ) событие $A \in B$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих и событию A и B ;

Ответ: Г)

8. Вероятность суммы двух совместных событий A_1, A_2 равна:

- ก) $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$;
- ข) $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_2|A_1)$;
- ค) $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_2|A_1)$;
- ด) $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_2 A_1)$;
- ฉ) $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_2 A_1)$;

Ответ: Г)

9. Вероятность произведения двух совместных событий равна:

- ก) $P(AB) = P(A)P(B)$;
- ข) $P(AB) = P(A)P(A|B)$;
- ค) $P(AB) = P(B)P(A|B)$;
- ด) $P(AB) = P(A)P(B|A)$;

ทั้ง) $P(AB) = P(A)P(A \times B);$
 Ответ: B)

10. Формула полной вероятности:

หนึ่ง) $P(A) = \sum_{i=1}^m P(A_i)P(H_i);$
 สอง) $P(A) = \sum_{i=1}^m P(A_i)P(H_i|A_i);$
 สาม) $P(A) = \sum_{i=1}^m P(H_i)P(A|H_i);$
 ี่) $P(A) = \sum_{i=1}^m P(A_i)P(A|H_i);$

Ответ: B)

11. Законы распределения непрерывной случайной величины представляются в виде:

หนึ่ง) функции распределения $F(x)$ и совокупностью значений X ;
 สอง) функции распределения $F(x)$ и функции плотности распределения $g(x)$;
 สาม) функции распределения $F(x)$ и совокупностью значений p_i ;
 ี่) функции распределения $F(x)$ и рядом распределения $(x_i ; p_i)$;
 ทั้ง) функции распределения $F(x)$ и $\sum_{-\infty}^{\infty} P(X = x);$
 ึ) функции распределения $F(x)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx .$

Ответ: E)

12. Функция распределения случайной величины это:

หนึ่ง) Вероятность того, что $P(X = x);$
 สอง) Вероятность того, что $P(X \gg x);$
 สาม) Вероятность того, что $P(X \leq x);$
 ี่) Вероятность того, что $P(X \leq x);$
 ทั้ง) Вероятность того, что $P(X > x) .$

Ответ: B)

13. Функция плотности распределения случайной величины $g(x)$ это:

หนึ่ง) средняя плотность распределения вероятности на интервале Δx , равная $g(x) = \frac{F(x)}{\Delta x};$
 สอง) предельная средняя плотность вероятности на интервале Δx , равная $g(x) = F'(x);$
 สาม) предельная средняя плотность вероятности на интервале Δx , равная $g(x) = dF(x);$

- а) предельная средняя плотность вероятности на интервале Δx , равная
$$r(x) = \frac{F(x)}{\Delta x};$$
- б) средняя плотность распределения вероятности на интервале Δx , равная
$$r(x) = \frac{F(x) - F(\Delta x)}{\Delta x};$$

Ответ: Б)

14. Основные числовые характеристики дискретных случайных величин это:

- а) Среднее арифметическое, дисперсия, квантиль, моменты k -того порядка, мода и медиана;
- б) Дисперсия, центральные и начальные моменты k -того порядка, среднее геометрическое, мода и медиана;
- в) Математическое ожидание, мода, медиана, дисперсия, среднее квадратичное отклонение, центральные и начальные моменты k -того порядка.
- г) Математическое ожидание, среднее арифметическое, дисперсия, среднее квадратичное отклонение, мода, медиана, центральные и начальные моменты k -того порядка.
- д) Математическое ожидание, мода, медиана, дисперсия, среднее квадратичное отклонение, центральные и начальные моменты k -того порядка, эксцесс, асимметрия.

Ответ: Д)

15. Функция распределения $F(x)$ и функция плотности распределения имеют $r(x)$ следующие свойства:

- а) $F(x) < 0$; $r(x) = 1$;
- б) $0 < F(x) < 1$; $0 < r(x) < 1$;
- в) $0 \leq F(x) \leq 1$; $r(x) \leq 1$;
- г) $0 \leq F(x) \leq 1$; $r(x) \geq 0$;
- д) $0 \leq F(x) \leq 1$; $\int_{-\infty}^{\infty} r(x) dx > 1$.
- е) $0 < F(x) < \infty$; $r(x) > 1$.

Ответ: Г)

16. Дисперсия случайной величины равна:

а)

$$D[X] = M_{\text{ср}}^2 - M_{\text{ср}}^2$$

б)

$$D[X] = M_{\text{ср}}^2 - M_{\text{ср}}^2$$

в)

$$D[X] = M_{\text{ср}}^2(x) - M_{\text{ср}}^2$$

г) $D[X] = M_{\text{ср}}^2(x) + M[X]^2$

Ответ: В)

17. Математическое ожидание непрерывной случайной величины равно:

หนึ่ง)

$$M[X] = \sum x \cdot p$$

สอง)

$$M[X] = \sum x \cdot p / \sum p$$

สาม)

$$M[X] = \int_0^x x \cdot f(x) dx;$$

สี่) $M[X] = \int_0^1 x \cdot f(x) dx;$

ห้า) $M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx;$

หก) $M[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i .$

Ответ: Д)

18. Нормальный закон распределения имеет следующую функцию плотности распределения $r(x)$:

หนึ่ง)

$$r(x) = \frac{2}{\sqrt{p}} e^{-x}$$

สอง)

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-x};$$

สาม)

$$r(x) = \frac{1}{s\sqrt{p}} e^{-\frac{x^2}{s^2}}$$

สี่) $r(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}$

ห้า) $r(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} e^{-\frac{x^2}{s^2}} dt;$

Ответ: Г)

19. Для нормального закона распределения вероятность попадания случайной величины в интервал ab равен:

หนึ่ง)

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a)$$

สอง)

$$P(a < x < b) = F(b - m) - F(a - m)$$

สาม)

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a - m)$$

สี่) $P(a < x < b) = F(b) - F(a) = F(b - m) - F(a - m);$

$$и) P(a < x < b) = F(b) + F(a) = F\left(\frac{ab - m\ddot{o}^*}{e s \ddot{o}}\right) + F\left(\frac{aa - m\ddot{o}}{e s \ddot{o}}\right)$$

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) = F\left(\frac{ab - m\ddot{o}^*}{e s \ddot{o}}\right) - F\left(\frac{aa - m\ddot{o}}{e s \ddot{o}}\right)$$

Ответ: Д)

20. Сущность предельных теорем и закона больших чисел заключается:

- и) В определении числовых характеристик случайных величин при большом числе наблюдаемых данных;
- а) В поведении числовых характеристик и законов распределения наблюдаемых значений случайных величин;
- а) В определении области применения нормального закона распределения случайных величин при сложении большого количества случайных величин;
- а) В поведении числовых характеристик и законов распределения случайных величин при увеличении числа наблюдений и опытов.
- и) В определении суммарных значений основных характеристик законов распределения.

Ответ: А)

21. Коэффициент корреляции случайных величин характеризует:

- и) Степень независимости между случайными величинами;
- а) Степень нелинейной зависимости между случайными величинами;
- а) Степень линейной зависимости между случайными величинами;
- а) Степень регрессии между случайными величинами;
- и) Степень разброса двух величин относительно математического ожидания.
- и) Степень отклонения двух величин от их математических ожиданий.

Ответ: В)

22. Марковским случайным процессом называют такие процессы, у которых:

- и) Плотность совместного распределения произвольных N сечений полностью определяет поведение процесса;
- а) Плотность совместного распределения произвольных $(N - 1)$ сечений полностью определяет поведение процесса;
- а) Плотность совместного распределения произвольных $N = 3$ сечений полностью определяет поведение процесса;
- а) Плотность совместного распределения произвольных $N = 2$ сечений полностью определяет поведение процесса;
- и) Плотность совместного распределения произвольных $N = 4$ сечений полностью определяет поведение процесса;

Ответ: Г)

23. Марковскими цепями называют случайных процесс, у которого:

- ๓๓) Сама функция подчиняется нормальному закону распределения;
 ๓๔) Сама функция подчиняется показательному закону распределения;
 ๓๕) Сама функция имеет дискретный характер;
 ๓๖) Сама функция имеет непрерывный характер;
 ๓๗) Сама функция подчиняется биномиальному закону распределения;
- Ответ: В)

24. К оценкам генеральной совокупности предъявляются следующие требования:

- ๓๓) Оценка должна быть стационарной, эргодичной и эффективной;
 ๓๔) Оценка должна быть состоятельной, эргодичной и эффективной;
 ๓๕) Оценка должна быть состоятельной, стационарной и эргодичной ;
 ๓๖) Оценка должна быть состоятельной, эффективной и несмещенной;
 ๓๗) Оценка должна быть несмещенной, стационарной и эффективной;

Ответ: Г)

25. Статистической гипотезой называют:

- ๓๓) Предположение относительно параметров и вида закона распределения генеральной совокупности;
 ๓๔) Предположение относительно объема генеральной совокупности;
 ๓๕) Предположение относительно параметров и вида закона распределения выборки;
 ๓๖) Предположение относительно объема выборочной совокупности;
 ๓๗) Предположение относительно статистического критерия ;

Ответ: В)

26. При проверки статистической гипотезы ошибка первого рода это:

- ๓๓) Принятие в действительности неверной гипотезы;
 ๓๔) Отвержение в действительности правильной гипотезы;
 ๓๕) Принятие в действительности правильной гипотезы;
 ๓๖) Отвержение в действительности неправильной гипотезы;

Ответ: В)

27. В критерии Колмогорова за меру качества согласия эмпирического и теоретического распределения принимается:

- ๓๓) Относительное расхождение между теоретической и эмпирической частотами попадания случайной величины в интервал;
 ๓๔) Максимальное расхождение по модулю между теоретической и эмпирической частотами попадания случайной величины в интервал;
 ๓๕) Среднее квадратичное отклонение между теоретической и эмпирической частотами попадания случайной величины в интервал;

- а) Максимальное расхождение модуля разности между эмпирической и теоретической функциями распределения;
 б) Максимальное расхождение модуля разности между эмпирической и теоретической функциями плотности распределения;

Ответ: Г)

28. Дисперсионный анализ позволяет:

- а) Установить степень влияния фактора на изменчивость признака;
 б) Установить количество факторов влияния на изменчивость признака;
 в) Установить степень влияния факторов на дисперсию;
 г) Установить степень влияния фактора на среднее значение;
 д) Установить степень влияния фактора на числовые характеристики случайной величины;

Ответ: В)

29. Задачами регрессионного анализа являются:

- а) Выявление связи между случайными величинами и оценка их тесноты;
 б) Выявление связи между случайными величинами и их числовыми характеристиками;
 в) Выявление уравнения связи между случайными величинами;
 г) Выявление уравнения связи между случайной зависимой переменной и неслучайными независимыми переменными и оценка неизвестных значений зависимой переменной;
 д) Выявление уравнения связи между неслучайной зависимой переменной и случайными независимыми переменными и оценка неизвестных значений независимой переменной;
 е) Выявление уравнения связи между неслучайной независимой переменной и случайными независимыми переменными и оценка неизвестных значений зависимой переменной;

Ответ: Е)

II. Тип задания: сопоставление, последовательность

Уровень сложности: повышенный

Время 3-5 мин.

1 Установите соответствие между формулами для определения вероятности случайного события по:

1. классическому определению	А) $P(A) = \frac{m}{n}$
2. статистическому определению	Б) $P^*(A) = \frac{m_A}{n}$

Ответы:

1	2
А	Б

2 Установите соответствие между значениями вероятностей для:

1. достоверного события	А) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2. невозможного события	Б) 0
3. противоположных событий	В) 1

Ответ:

1	2	3
В	Б	А

3 Установите соответствие между типами комбинаций и формулами для определения их количества:

1. перестановки	А) $A_n^m = n! / (n - m)!$
2. сочетания	Б) $P_n = n!$
3. размещения	В) $C_n^m = n! / m!(n - m)!$

Ответ:

1	2	3
Б	В	А

4 Установите соответствие между формулами для определения вероятности случайных событий А и В:

1. события А и В несовместны	А) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
2. события А и В независимы	Б) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Ответы:

1	2
Б	А

5 Установите соответствие между формулами для определения вероятности случайных событий А и В.

1. события А и В совместны	А) $P(A \cap B) = P(A) \times P(A / B)$
2. события А и В зависимы	Б) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Ответы:

1	2
Б	А

III. Тип задания: задание с развернутым ответом
Уровень сложности: высокий
Время 5-10 мин.

1. Из 1000 собранных на заводе телевизоров 5 штук бракованных. Эксперт проверяет один наугад выбранный телевизор из этой 1000. Найдите вероятность того, что проверяемый телевизор окажется бракованным.

Ответ: При выборе телевизора наугад возможны 1000 исходов, событию А «выбранный телевизор – бракованный» благоприятны 5 исходов. По определению вероятности $P(A) = 5 \div 1000 = 0,005$.

2. В урне 9 красных, 6 жёлтых и 5 зелёных шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется жёлтым?

Ответ: Общее число исходов равно числу шаров: $9 + 6 + 5 = 20$. Число исходов, благоприятствующих данному событию, равно 6. Искомая вероятность равна $6 \div 20 = 0,3$.

3. Петя, Вика, Катя, Игорь, Антон, Полина бросили жребий – кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет мальчик.

Ответ: Вероятность события равна отношению количества благоприятных случаев к количеству всех случаев. Благоприятными случаями являются 3 случая, когда игру начинает Петя, Игорь или Антон, а количество всех случаев 6. Поэтому искомое отношение равно $3:6=0.5$.

4. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

Ответ: Обозначим через А событие «команда России во второй группе». Тогда количество благоприятных событий $m = 4$ (четыре карточки с номером 2), а общее число равновозможных событий $n = 16$ (16 карточек) по определению вероятности $P = 4: 16 = 0.25$.

5. В лыжных гонках участвуют 11 спортсменов из России, 6 спортсменов из Норвегии и 3 спортсмена из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен не из России.

Ответ: Всего спортсменов $11 + 6 + 3 = 20$ человек. Поэтому вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен не из России равна $9:20 = 0.45$.

IV. Тип задания: задание с развернутым ответом
Уровень сложности: высокий

Время 5-10 мин.

1. На каждые 1000 электрических лампочек приходится 5 бракованных. Какова вероятность купить исправную лампочку?

Ответ: На каждые 1000 лампочек приходится 5 бракованных, всего их 1005. Вероятность купить исправную лампочку будет равна доле исправных лампочек на каждые 1005 лампочек, то есть $1000:1005=0.995$.

2. В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Ответ: $6 : 8=0.75$.

3. В чемпионате по футболу участвуют 16 команд, которые жеребьевкой распределяются на 4 группы: А, В, С и D. Какова вероятность того, что команда России не попадает в группу А?

Ответ: Каждая команда попадет в группу с вероятностью 0,25. Таким образом, вероятность того, что команда не попадает в группу равна $1-0,25=0.75$.

4. На турнир по шахматам прибыло 26 участников в том числе Коля и Толя. Для проведения жеребьевки первого тура участников случайным образом разбили на две группы по 13 человек. Найти вероятность того, что Коля и Толя попадут в разные группы.

Ответ: Всего 26 мест. Пусть Коля займет случайное место в любой группе. Останется 25 мест, из них в другой группе 13. Исходом считаем выбор места для Толи. Благоприятных исходов 13. $P=13/25 = 0.52$.

5. В классе 16 учащихся, среди них два друга – Вадим и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Сергей окажутся в одной группе.

Ответ: Если Сергею первому досталось некоторое место, то Олегу остаётся 15 мест. Из них 3 — в той же группе, где Сергей. Искомая вероятность равна $3/15 = 0.2$.

6. В классе 21 учащийся, среди них два друга — Вадим и Олег. Класс случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Олег окажутся в одной группе.

Ответ: Пусть один из друзей находится в некоторой группе. Вместе с ним в группе окажутся 6 человек из 20 оставшихся учащихся. Вероятность того, что друг окажется среди этих 6 человек, равна $6 : 20 = 0.3$.

